



TITLE:

# 格子点問題と多変数フーリエ級数の収束問題のある接点について (解析的整数論 : 指数和について)

AUTHOR(S):

倉坪, 茂彦

---

CITATION:

倉坪, 茂彦. 格子点問題と多変数フーリエ級数の収束問題のある接点について (解析的整数論 : 指数和について). 数理解析研究所講究録 1982, 456: 45-60

ISSUE DATE:

1982-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103040>

RIGHT:

# 格子点問題と多変数フーリエ級数の収束問題のある接点について

弘前大 理 倉坪茂彦

本稿の目的は数論の一分野である格子点問題と多変数フーリエ級数の収束問題の関連性について述べることである。

## §1 格子点問題

まず記号を導入する。 $N \in 2$ 以上の自然数,  $\mathbb{Z}^N \in N$ 次元格子点  $n = (n_1, \dots, n_N)$  (各  $n_i$  は整数) の全体,  $\mathbb{R}^N \in N$ 次元ユークリッド空間, また,  $x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$  に対し  $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N, |x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$ , また  $e_n(x) = \exp(2\pi i n \cdot x)$  とする。

いま, 半径  $\sqrt{t}$  の  $N$ 次元球内の格子点の数を考えよう。そのオー近似的はその体積で与えられる。これらの差

$$P_t = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} 1 \right) - \pi^{N/2} / \Gamma(N/2 + 1) t^{N/2}$$

を評価する問題, 更に, 一般化して各格子点  $n$  に重み  $c_n(x)$  を掛けた場合の差

$$P_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n(x) - \pi^{\frac{N}{2}} / \Gamma(\frac{N}{2} + 1) t^{\frac{N}{2}} \delta(x)$$

ただし,  $\delta(x)$  は  $x \in \mathbb{Z}^N$  のとき 1, その他で零をとる関数を評価する問題が表題に云うところの格子点問題である。

例えば,  $N=2$  のとき次のことが知られている。(数学辞典第二版 p411)

$$P_t = P_t(0) = \begin{cases} O(t^{\frac{12}{37}}) & \text{Wen-Lin Yin (1962)} \\ O(t^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} t) & \text{Hardy (1916)} \end{cases}$$

$$\text{また } \frac{1}{t} \int_0^t |P_s| ds = O(t^{\frac{1}{4}}) \quad \text{Cramér (1926)}$$

更に, Hardy は  $P_t = O(t^{\frac{1}{4} + \varepsilon})$  ( $\varepsilon > 0$ ) を予想している。

格子点問題は Hardy, Landau, Walfisz, Jarník, Novák 等の研究により発展してきた。1940年から1972年までの発展の様子を知るには W.J. LeVeque 編「reviews in Number Theory vol.4」(A.M.S. 1974)が重宝である。なおこれらの研究は一般の正值二次形式  $Q(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i x_j$  に対して議論されていることが多いが、ここでは専らフーリエ級数の球形和との関連性に興味があるので  $Q(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2$  の場合のみ考えようということである。

次ぎに格子点問題の結果のうち「球形和」と関連のあるものを列挙する。 $N, x$  について条件のなりときはすべての  $N$  に対して、あるいは、すべての  $x \in \mathbb{R}^N$  に対して成立することを意味する。

$$(1.1) \quad P_t(x) = O(t^{\frac{N}{2} - \frac{N}{N+1}}) \quad (\text{Landau [19]})$$

$$(1.2) \quad P_t(x) = O(t^{\frac{N-1}{4}}) \quad (\text{Jarník [14]})$$

$$(1.3) \quad P_t(x) = \begin{cases} O(t^{\frac{N}{2}-1}) & (N > 4) \\ O(t \log^2 t) & (N = 4) \end{cases} \quad (\text{Novák [21]})$$

$$(1.4) \quad P_t(x) = \begin{cases} O(t^{\frac{N}{2}-1}) & (x \in \mathbb{Q}^N, N > 4) \\ o(t^{\frac{N}{2}-1}) & (x \notin \mathbb{Q}^N, N > 4) \end{cases} \quad (\text{Novák [21]})$$

ここで  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{Q}^N$  とは各  $x_i$  が有理数であることとす。

$$(1.5) \quad P_t(x) = O(t^{\frac{N}{4}} \log^k t) \quad (\text{almost all } x, N \geq 4) \quad (\text{Novák [27]})$$

ここで,  $k$  は  $N/4$  のみに依存する正定数である。

$$(1.6) \quad M_+(x) = \left( \frac{1}{t} \int_1^t |P_s(x)|^2 ds \right)^{1/2} \quad \text{とす。}$$

$$O(t^{\frac{N-1}{4}}) = M_+(x) = \begin{cases} O(t^{\frac{N}{2}-1}) & (N \geq 4) \\ O(t^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} t) & (N=3) \\ O(t^{\frac{1}{4}}) & (N=2) \end{cases} \quad (\text{Novák [23]})$$

(1.7) 各  $x \in \mathbb{Q}^N$  に対して, 次をみたす  $K = K(x, N) > 0$  があ

$$M_+(x) = \begin{cases} K t^{\frac{N}{2}-1} + o(t^{\frac{N}{2}-1}) & (N \geq 4) \\ K t^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} t + o(t^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} t) & (N=3) \end{cases} \quad (\text{Novák [23]})$$

(例として  $N \geq 4$  のとき  $K$  は具体的に  $K(x, N) =$

$\frac{\pi^{N-2}}{4(N-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h \neq 0, (h,k)=1} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2N-2} h^2}$  とかける。  $S_{h,k}$  は Gauss 和の変形である。)

$$(1.8) \quad M_+(x) = O(t^{\frac{N-1}{4}} \log^k t) \quad (\text{a.a. } x) \quad (\text{Novák [20]})$$

$$(1.9) \quad R_+(x) = \sum_{|n| \leq t} e_n(x) - \int_{|y| \leq t} e^{2\pi i y x} dy \\ = \sum_{|n| \leq t} e_n(x) - \pi^{\frac{N}{2}} t^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi |x| \sqrt{t})$$

(ここで,  $j_\nu(z) = J_\nu(z)/(\frac{z}{2})^\nu$ ,  $J_\nu$  は  $\nu$  次の Bessel 関数)

とすると,  $N$  にのみ依存する正定数  $C=C_N$  が存在して次が成立する。

$$|R_t(x)| \leq \begin{cases} C t^{\frac{N}{2}+1} & (x \text{ に関して一様に}) \quad (N \geq 5) \\ C t \log^2 t & (N=4) \end{cases}$$

Babenko 1978 [3] の結果であるが, 本質的には Novák 1968 [21] の結果である。(このことについては Kuratsuoka [15] を参照された) また,  $N=2, 3$  に対してこの種の結果は得られなかったが Novák [20] の証明をたどってゆくと

$$\left( \frac{1}{t} \int_1^t |R_s(x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \begin{cases} C t^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} t & (N=3) \\ C t^{\frac{1}{4}} & (N=2) \end{cases}$$

( $x$  に関して一様に)

が得られる。

(1.10) ディオファントス近似との関係を示唆するものとして次の結果がある。 $\gamma(x) = \sup \{ \beta > 0 \text{ s.t. } |kx_i - h_i| < 1/k^\beta \text{ を満たす無限個の } (k, h_1, \dots, h_N) \text{ が存在する} \}$  とするとき,

$$N > 4, \gamma(x) \geq \frac{2}{N-4} \Rightarrow R_+(x) = \begin{cases} O(t^{(\frac{N}{4}-\frac{1}{2})\frac{\gamma(x)+1}{\gamma(x)+1} + \varepsilon}) \\ \Omega(t^{(\frac{N}{4}-\frac{1}{2})\frac{\gamma(x)+1}{\gamma(x)+1} - \varepsilon}) \end{cases}$$

(すべての正数  $\varepsilon$  に対して)

(Novák [22])

## §2 多変数フーリエ級数の収束問題

$f \in L^1(\mathbb{T}^N)$  のフーリエ級数

$$f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \hat{f}(n) e_n(x) \quad (\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x) \overline{e_n(x)} dx)$$

を考える。一次元フーリエ級数について、これは次の結果がよく知られている。

(I)  $S_m(f; x) = \sum_{n=-m}^m \hat{f}(n) e_n(x)$  が各  $x$  で発散するような  $f \in L^1(\mathbb{T})$  がある。(Kolmogorov 1926)

(II)  $p > 1$  のとき  $f \in L^p(\mathbb{T})$  ならば  $\{S_m(f; x)\}$  は almost all  $x$  で  $f(x)$  に収束する。(Carleson-Hunt 1966)

多変数の場合に対応する問題を考えると、部分和  $S_m(f; x)$  に対応するものとして 何をとるか というのが問題になる。一般に  $D$  を  $0 \in \mathbb{Z}^N$  を内点としてもつ有界集合とすると、 $D$  型部分和： $S_t^D(f; x) = \sum_{n \in tD} \hat{f}(n) e_n(x)$  を考えることができるが、代表的なものは  $D = [-1, 1]^N$ ,  $D = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 1\}$  の場合で、前者を矩形和、後者を球形和という。これらの2つの場合の収束問題は結果も使われる手法も全く異なるという。例えば、

(2.1)  $p > 1$  のとき、任意の  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  に対して

$$\sum_{|n_1| \leq t} \cdots \sum_{|n_N| \leq t} \hat{f}(n) e_n(x) \longrightarrow f(x) \quad (\text{almost all } x) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

(Fefferman [7])

(2.2) 任意の  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  に対して  $\sum_{|n| \leq t} \hat{f}(n) e_n(x) \longrightarrow f(x) \quad (\text{a.a. } x)$

が成立するのは高々  $p=2$  のときのみである。

(Fefferman [8], Babenko [2])

このように“部分部を如何にとるか?” というのは本質的な問題であるが, ここでは専ら球形和についてのみ考える。ところで, (2.2) の観点より何らかの総和法を考えるのは必然であるが, とくに Riesz (Riesz-Bochner) 総和法がよく研究されている。

(2.3) 定義  $S_t^\alpha(f; x) = \sum_{|n|^2 \leq t} \left(1 - \frac{|n|^2}{t}\right)^\alpha \hat{f}(n) e_n(x)$  ( $\alpha \geq 0$ )  
を  $f$  の フーリエ級数の  $\alpha$  次 Riesz 平均といい,

$$S_t^\alpha(f; x) \longrightarrow S(x) \quad \text{as } t \longrightarrow \infty$$

とき  $f$  の フーリエ級数は  $S(x)$  に  $\alpha$  次 Riesz 総和可能であるという。また

$$\frac{1}{t} \int_0^t |S_u^\alpha(f; x) - S(x)|^2 du \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \longrightarrow \infty$$

とき  $S_t^\alpha(f; x)$  は  $S(x)$  に強収束する, あるいは,  $f$  の フーリエ級数は  $S(x)$  に  $\alpha$  次強 Riesz 総和可能であるという。

表題にいう多変数フーリエ級数の収束問題とは  $\{S_t^\alpha(f; x)\}_{t \rightarrow \infty}$  の収束性 (ノルム収束, 点毎収束, 強収束) に関する問題を指すものとする。まず最初ノルム収束に関する結果を述べる。

(2.4)  $\alpha > \frac{N-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right|$  とき, 任意の  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  に対し

$$\|S_t^\alpha(f) - f\|_p \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \longrightarrow \infty \quad (\text{Stein [25]})$$

(2.5)  $\alpha \leq \frac{N-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right| - \frac{1}{p}$  (ただし,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ) のとき,

$\|S_t^\alpha(f) - f\|_p \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$  とする  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  が在る。

(Herg [11])

この2つの結果は11すれど 1950 年代に得られ、その gap  
 $\{(\alpha, p) \text{ s.t. } 1 \leq p < \infty, \frac{N-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right| - \frac{1}{p} < \alpha \leq \frac{N-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right| \}$   
 を埋める研究が 1969 年以降 Fefferman 等により大きく発展して来た。その代表的なものは次の2つである。

(2.6)  $N=2$  のとき、上の gap は完全に肯定的に解決される。  
 (Carleson & Sjölín [4])

(2.7)  $N \geq 3$  のとき、上の gap のうち  $\alpha > \frac{N-1}{2}$  の部分は肯定的に解決される。(Fefferman [6] [9])

$N \geq 3$  のときも上の gap が完全に肯定的に解決されることが予想されている (Alimov, Ilin & Nikishin [1]) が現在のところ未解決である。

(2.8) 予想  $\alpha > \frac{N-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right| - \frac{1}{p}$  のとき、任意の  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  に対して、 $\|S_t^\alpha(f) - f\|_p \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$  が成立する。

次に点毎収束に眼を向けると、次の結果が現存知られている最良のものである。

(2.9)  $\alpha > \frac{N-1}{2} \left( \frac{2}{p} - 1 \right)$ ,  $1 \leq p \leq 2$  のとき、任意の  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  に対して  $\{S_t^\alpha(f; x)\}_{t>0}$  は  $f(x)$  を almost all  $x$  で収束する。(Stein [25])

(2.10)  $\alpha \leq \frac{N-1}{2} \left( \frac{2}{p} - 1 \right) - \frac{1}{p}$ ,  $1 \leq p \leq 2$  のとき  $\{S_t^\alpha(f; x)\}_{t>0}$  が almost all  $x$  で発散する  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  が在る。(Babenko [2])



この場合も gap  $(\alpha, p)$  s.t.  $1 \leq p \leq 2$ ,  $\frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1) - \frac{1}{p'} < \alpha \leq \frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1)$  で概収束が成立するかどうか非常に興味ある問題である。一変数の場合, M. Riesz のノルム収束の結果 (1927) から Carleson の概収束の結果 (1966) までに長い道程があったことを考えよと極めて難しい問題と想像されよ。

(2.11) 予想  $\alpha > \frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1) - \frac{1}{p'}$ ,  $1 \leq p \leq 2$  のとき, 任意の  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  に対し,  $S_t^\alpha(f; x) \rightarrow f(x)$  a.s.  $x$  として  $S_t^\alpha(f; x) \rightarrow f(x)$  a.s.  $x$  が成り立つ。

最後に強収束については次がよく知られている。

(2.12)  $\alpha > \frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1) - \frac{1}{p'}$ ,  $1 \leq p \leq 2$  のとき, 任意の  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  に対し  $\frac{1}{t} \int_0^t |S_u^\alpha(f; x) - f(x)|^2 du \rightarrow 0$  a.s.  $x$  (Stein [25])

§3  $P_t^\alpha(x)$  の評価に関する Stein & Weiss の結果

$$K_t^\alpha(x) = \sum_{|n| \leq t} (1 - \frac{|n|^2}{t})^\alpha e_n(x) \quad (\alpha \geq 0)$$

と  $\alpha$  次の Riesz 核 (Riesz-Bochner 核ともいう) とする。  $\alpha > \frac{N}{2}$  のとき Poisson の和公式より

$$\begin{aligned} P_t^\alpha(x) &= K_t^\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{N}{2} + \alpha + 1)} \pi^{\frac{N}{2}} t^{\frac{N}{2}} \delta(x) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi^\alpha} t^{\frac{1}{2}(\frac{N}{2} - \alpha)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N, n \neq x} J_{\frac{N}{2} + \alpha}(2\pi\sqrt{t}|x-n|) / |x-n|^{\frac{N}{2} + \alpha} \end{aligned}$$

(右辺は  $\mathbb{T}^N$  上絶対かつ一様収束)

を得る。次で Bessel 関数の漸近公式  $J_\nu(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos(r - \frac{2\nu+1}{4}\pi) + O(\frac{1}{r^{3/2}})$

を代入し

$$(3.1) \quad P_t^\alpha(x) = \Gamma(\alpha+1)/\pi^{\alpha+1} t^{\frac{1}{2}(\frac{N-1}{2}-\alpha)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N, n \neq 0} \cos(2\pi\sqrt{t}|x-n|+\delta)/|n|^{\frac{N-1}{2}+\alpha} + E(t, \alpha, x).$$

$$\therefore \text{よ}, \quad \delta = -\frac{N+2\alpha+1}{4}\pi, \quad \text{又} \quad \sup_{\alpha > \frac{N-1}{2}} \sup_{t \geq 1} |E(t, \alpha, x)| < +\infty \quad (x \in \mathbb{T}^N)$$

を得る。また

$$P_t^\alpha(x) = C_\alpha t^{-\alpha} \int_0^t P_s^{\frac{N-1}{2}}(x) (t-s)^{\alpha-\frac{N-1}{2}-1} s^{\frac{N-1}{2}} ds \quad (\alpha > \frac{N-1}{2})$$

$$(C_\alpha = \Gamma(\alpha+1)/\Gamma(\frac{N-1}{2})\Gamma(\alpha-\frac{N-1}{2}))$$

より

$$(3.2) \quad \sup_{\alpha > \frac{N-1}{2}} \sup_{t \geq 1} |P_t^\alpha(x)| \leq \sup_{t \geq 1} |P_t^{\frac{N-1}{2}}(x)|$$

を得る。

(3.3) 定理  $\{|x-n| \text{ s.t. } n \in \mathbb{Z}^N\}$  が  $\mathbb{Q}$  上-一次独立になる  $x$  の全体を  $S$  とかく。このとき,  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\sum_{|n| \leq t} (1 - \frac{|n|^2}{t})^{\frac{N-1}{2}} c_n(x)| = \infty \quad (x \in S)$

(Stein & Weiss [27] p.270.)

( $S$  には  $\mathbb{R}^N$  の Lebesgue 測度が零であること, 又  $S \cap \mathbb{Q}^N = \emptyset$  なども知られてゐる。とくに定理の結論は almost all  $x$  に対して成立する。)

証明  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\sum_{|n| \leq t} (1 - \frac{|n|^2}{t})^{\frac{N-1}{2}} c_n(x)| < +\infty$  と仮定すると, (3.2) より

$$i) \quad \sup_{\alpha > \frac{N-1}{2}} \sup_{t \geq 1} |P_t^\alpha(x)| < +\infty. \quad \text{よって (3.1) より}$$

$$\sup_{\alpha > \frac{N-1}{2}} \sup_{t \geq 1} \left| \sum_{n \neq 0} \frac{\cos(2\pi\sqrt{t}|x-n|+\delta)}{|n|^{\frac{N-1}{2}+\alpha}} \right| < +\infty$$

ii)  $x_0 \in S$  とすれば Kronecker の定理より

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^N} = \sup_{\alpha > \frac{N-1}{2}} \left( \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^{\frac{N-1}{2}+\alpha}} \right) < +\infty \quad \text{これは矛盾。}$$

(3.3) の系として  $P_t(x)$  の下からの評価が得られる。

(3.4) 定理  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{4}}} \left| \sum_{|n|^2 \leq t} c_n(x) \right| = \infty \quad (x \in S)$

証明  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{4}}} \left| \sum_{|n|^2 \leq t} c_n(x_0) \right| < +\infty$  と仮定すると

$$\sum_{|n|^2 \leq t} c_n(x_0) = O(t^{\frac{N-1}{4}})$$

一方  $\alpha > \frac{N-1}{2}$  のとき,  $\sum_{|n|^2 \leq t} (t - |n|^2)^\alpha c_n(x_0) = O(t^{\frac{1}{2}(\frac{N-1}{2} + \alpha)})$  (3.1) より

これら 2 の評価に対し Riesz 総和法に関する補間定理 (3.5) を用いる。

$$\sum_{|n|^2 \leq t} (t - |n|^2)^{\frac{N-1}{2}} c_n(x_0) = O(t^{\frac{N-1}{2}})$$

これは (3.3) に矛盾する。

(3.5) Riesz 総和法に関する補間定理

(Chandrasekharan & Minakshisundaram [5] p13)

$$\sum_{k \leq t} (t-k)^{\alpha_i} a_k = O(t^{\beta_i}) \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2, \beta_i \geq 0$$

かつ  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$

ならば,  $\sum_{k \leq t} (t-k)^\alpha a_k = O(t^\beta)$  ( $\alpha = \theta\alpha_1 + (1-\theta)\alpha_2, \beta = \theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2$ ).

とすると §1 で述べた Hardy の結果は  $N=2$  のとき

$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{4}}} |P_t(0)| = \infty$  を主張するものである。また  $N \geq 3$  のとき

(1.7) より  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{4}}} |P_t(x)| = \infty \quad (x \in \mathbb{Q}^N)$  が成り立っている。一般に次の予想が成立するのではないか?

(3.6) 予想  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{4}}} |P_t(x)| = \infty \quad \text{for all } x$

この § では  $\sum_{|n|^2 \leq t} (1 - \frac{|n|^2}{t})^{\frac{N-1}{2}} c_n(x)$ , 及び  $\sum_{|n|^2 \leq t} c_n(x)$  の点毎評価を議

論してまたが、対応する  $L^1$ -ノルム評価として次のものが知られている。

$$(3.7) \quad \left\| \sum_{|n| \leq t} \left(1 - \frac{|n|^2}{t}\right)^{\frac{N-1}{2}} e_n \right\|_1 = \alpha_N \log t + O(1) \quad (\text{Stein [26]})$$

$$(3.8) \quad C_1 t^{\frac{N-1}{4}} \leq \left\| \sum_{|n| \leq t} e_n \right\|_1 \leq C_2 t^{\frac{N-1}{4}} \quad (C_i > 0)$$

(左側不等式は Il'in [13], 右側不等式は Shapiro [24])

#### §4 格子点問題と収束問題の接点

まず, (1.2), (1.6), (3.4) と Abel 変換により次の定理を得る。

(4.1) 定理 (i)  $0 \leq \alpha, \sigma \leq \frac{N-1}{2}$ ,  $\alpha + \sigma < \frac{N-1}{2}$  のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{|n|^2 \leq t} \left(1 - \frac{|n|^2}{t}\right)^{\alpha} \frac{e_n(x)}{|n|^{\sigma}} \right| = \infty \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

(ii) (i) と同じ条件の下で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^t \left| \sum_{|n|^2 \leq u} \left(1 - \frac{|n|^2}{u}\right)^{\alpha} \frac{e_n(x)}{|n|^{\sigma}} \right|^2 du = \infty \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

(iii)  $0 \leq \alpha, \sigma \leq \frac{N-1}{2}$ ,  $\alpha + \sigma = \frac{N-1}{2}$  のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{|n|^2 \leq t} \left(1 - \frac{|n|^2}{t}\right)^{\alpha} \frac{e_n(x)}{|n|^{\sigma}} \right| = \infty \quad (x \in S)$$

一方, 級数  $\sum_{n \neq 0} \frac{e_n(x)}{|n|^{\sigma}}$  は  $g_{\sigma}(x) (= C_{\sigma}/|x|^{N-\sigma} + g_{\sigma}(x))$ ,  $g_{\sigma} \in C^{\infty}(\mathbb{T}^N)$   
 $C_{\sigma} = \pi^{\sigma - \frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N-\sigma}{2}) / \Gamma(\frac{\sigma}{2})$  のフーリエ級数であることはよく知られていゝ。 (例えは Stein & Weiss [27] の p.256)

$$(4.2) \quad g_{\sigma} \in L^p(\mathbb{T}^N) \iff \sigma > N/p'$$

に注意して次の定理が得られる。

(4.3) 定理 (i)  $0 \leq \alpha < \frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1) - \frac{1}{p}$ ,  $1 \leq p \leq 2$  のとき,

" $S_t^\alpha(f; x)$  が almost all  $x$  で発散する" ような  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  が存在する。の具体例として  $f_0$  (適当な  $\sigma$  に対して) がとれ, かつ "almost all  $x$ " は "all  $x$ " で置き換えられる。

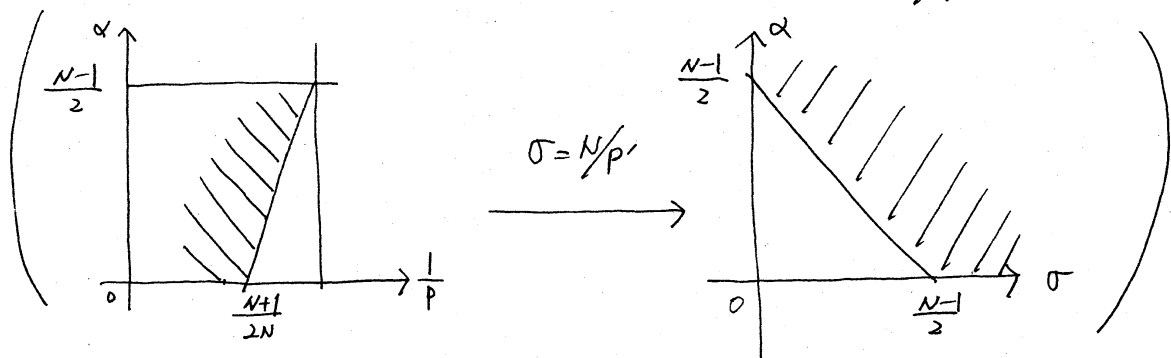
(ii)  $0 \leq \alpha < \frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1) - \frac{1}{p}$ ,  $1 \leq p \leq 2$  のとき,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^t |S_u^\alpha(f; x)|^p du = \infty$  ( $x \in \mathbb{R}^N$ ) とする  $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$  が存在し, かつこのよう関数として  $f_0$  がとれる。

((4.1), (4.2) の詳細については Kuratsubo [17] [16] [18] を参照された。)

(4.4) 定理 予想 (2.11) が真ならば,  $\sum_{|n| \leq t} c_n(x) = O(t^{\frac{N-1}{4} + \varepsilon})$  (almost all  $x$ ) (任意の正数  $\varepsilon$  に対して) が成り立つ。

証明 (2.11) が真であるとし, 変換  $\sigma = N/p'$  を施せば



$\sigma > \frac{N-1}{2}$  のとき almost all  $x$  で  $\sum_{|n| \leq t} (1 - \frac{|n|^2}{t})^\alpha \frac{c_n(x)}{|n|^\sigma}$  は収束する。  
(すべての  $\alpha > 0$  に対して)。また Riesz 平均に関してよく知られた事実 (Hardy [10] p131 の Thm 76 & v. Hobson p90 [12]) を使えば,  $\sum_{n \neq 0} \frac{c_n(x)}{|n|^\sigma}$  は  $\sigma > \frac{N-1}{2}$  のとき almost all  $x$  で収束する。

と分かる。Abel変換により求める結果を得る。

この(4.4)及び(1.8), (3.8)から次の予想の妥当性は十分強いように思われるが如何なるものであろうか?

(4.5) 予想  $\sum_{|n| \leq t} c_n(x) = O(t^{\frac{N-1}{4} + \varepsilon})$  at almost all  $x$  (任意の正数  $\varepsilon$  に対し)。

## 文献

- [1] Sh. A. Alimov, V. A. Il'in and E. M. Nikishin Convergence problems of multiple trigonometric series and spectral decompositions I Russian Math. Surveys vol. 31: 6 (1976) 29-86.
- [2] K. I. Babenko On summability and convergence of eigenfunction expansions of a differential operator. Math. USSR. Sbornik vol. 20 (1973) 157-211.
- [3] K. I. Babenko On the asymptotics of the Dirichlet kernel of spherical means of multiple Fourier series Dokl. Akad. Nauk. SSSR vol. 19 (1978) 1457-1461.
- [4] L. Carleson and P. Sjölén Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc. Studia Math. vol. 44 (1972) 287-299.
- [5] K. Chandrasekharan and S. Minakshisundaram Typical means Oxford 1952.

- [6] C. Fefferman Inequalities for strongly singular convolution operators *Acta Math.* vol. 124 (1970) 9-36.
- [7] C. Fefferman On the convergence of multiple Fourier series *Bull. Amer. Math. Soc.* vol. 77 (1971) 744-745.
- [8] C. Fefferman The multiplier problem for the ball *Annals of Math.* vol. 94 (1971) 330-336.
- [9] C. Fefferman A note on spherical summation multipliers *Israel J. Math.* vol. 15 (1973) 47-52
- [10] E. H. Hardy Divergent series Oxford (1949)
- [11] C. Herz On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms *Proc. Nat. Akad. Sci. U. S. A.* vol. 40 (1954) 996-999.
- [12] E. W. Hobson The theory of functions of a real variable and theory of Fourier series vol. II (1957) Dover
- [13] V. A. Il'in Problems of localization and convergence for Fourier series in fundamental systems of functions of the Laplace operator *Russian Math. Surveys* vol. 23: 2 (1968) 59-116.
- [14] V. Jarník Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre Berlin (1968) 139-156. (末尾参照\*)
- [15] S. Kuratsubo 多変数 Fourier 級数の球形総和法に関する Dirichlet 核の評価について. 数理論究録 (383) (1980) 127-139.

- [16] S. Kuratsubo ある種の多重三角級数の球形部分和に関する収束性について 実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集録 (1981) 12-25.
- [17] S. Kuratsubo On summability by the Riesz means of some trigonometric series Science Reports of Hiroaki U. vol. 28 (1981) 5-8.
- [18] S. Kuratsubo ある多重三角級数について 実解析セミナー (1981) 71-74.
- [19] E. Landau Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunkttheorie Berlin (1963)
- [20] B. Novák Über Gitterpunkte mit Gewichten in mehrdimensionalen Ellipsoiden; Mittelwertsätze Czech. Math. J. 17 (92) (1967) 609-623
- [21] B. Novák Verallgemeinerung eines Petersson'schen Satzes und Gitterpunkte mit Gewichten Acta Arith. vol. 13 (1968) 423-454.
- [22] B. Novák On lattice points with weight in high-dimensional ellipsoids Acta Arith. vol. 14 (1968) 371-397
- [23] B. Novák Mittelwertsätze der Gitterpunkttheorie Czech. Math. J. 19 (94) (1969) 154-180.
- [24] H.S. Shapiro Lebesgue constants for spherical partial sums Jour. Approx. Theory vol. 13 (1975) 40-44.



- [25] E.M. Stein Localization and summability of multiple Fourier series Acta Math. vol 100 (1958) 93-147.
- [26] E.M. Stein On certain exponential sums arising in multiple Fourier series Annals of Math. vol. 73 (1961) 87-109.
- [27] E.M. Stein and G. Weiss Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces Princeton (1971)

(\*) Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an E. Landau V.E.B. Berlin (1968) 139-158

× 12 A collection of papers in honor of E. Landau Plenum, New York (1969) 139-158